

## **ВВЕДЕНИЕ**

Моделирование становится неотъемлемой частью ретроспективного анализа и прогнозирования экономического развития страны. Приемлемым аппаратом моделирования, как совокупного научно-технического прогресса, так и различных его форм на макроэкономическом уровне можно считать метод производственных функций (ПФ). Производственная функция  $Y = F_t(K, L)$  определяет максимальный выпуск  $Y$ , которого можно достичь в момент времени  $t$  при полном (наиболее эффективном) использовании фондов  $K$  и труда  $L$ , либо когда степень их использования не меняется или имеет монотонную тенденцию изменения. В реальности можно наблюдать наличие отклонений  $Y$  от максимально возможного в зависимости от сбалансированности динамики факторов  $K$  и  $L$ . Под производственной поверхностью (ПП) понимается геометрическое представление ПФ.

Такая зависимость может быть построена поточечно на основании статистических данных, которые могут характеризоваться различного рода погрешностями. Возникает проблема построения по этим данным монотонной и выпуклой аппроксимирующей поверхности. Отметим, что исходные статистические данные могут указанными (геометрическими) свойствами не обладать. Традиционные подходы к решению такой задачи сводятся в основном к идентификации параметров ПФ, имеющих априорно-предполагаемое аналитическое представление (например, функции Кобба-Дугласа, CES-функции и др.).

Однако аналитические функции представляют собой довольно жесткие конструкции, поэтому с их помощью трудно учесть структуру исследуемого экономического процесса на каждом локальном участке.

Возможен другой подход, а именно, не специфицируя конкретный аналитический вид ПФ, искать аппроксимирующее решение в достаточно широком классе функции (например, кубических сплайнов), удовлетворяющих основным качественным свойствам ПФ (монотонные и выпуклые вверх положительные функции) и принадлежащих тому или иному линейному пространству. Потребность разработки сплайновой методики в эконометрическом моделировании видится, прежде всего, в следующем.

Во-первых, хорошие дифференциальные и аппроксимационные свойства, алгоритмичность, простота делают аппарат сплайнов универсальным средством обработки эконометрической информации на ЭВМ.

Во-вторых, экспериментальная информация, носящая дискретный характер (например, значения параметров того или иного экономического процесса в различные моменты времени), с помощью сплайнов может быть преобразована к непрерывному виду, записана в виде приближенно отражающей реальный экономический процесс функции.

В-третьих, экспериментальные данные, не зависимо от того, как они получены, всегда несут некоторую погрешность. Использование таких данных в качестве исходных при различных вычислениях может привести к значительному искажению результата. Сглаживание во многих случаях позволяет преобразовать исходную

информацию к виду, пригодному для ее дальнейшего применения (например, численного дифференцирования).

В-четвертых, методы моделирования различного рода зависимостей с помощью склеиваемых кусков различных функций обладают удобными локальными свойствами, что придает этим методам гибкость в процессе построения модели.

Некоторые идеи сплайнового подхода к моделированию ПФ реализованы в работах В.Л. Мирошниченко, С.И. Паринава, Д. Пуарье. Однако в этих работах для построения сплайновых ПФ используются классические виды ПФ и не учитываются, что многие функциональные зависимости, встречающиеся в экономике, обладают теми или иными специальными свойствами.

Основной задачей, которую мы ставим в работе, является исследование закономерностей роста экономики на основе анализа данных, описывающих ее динамику. Такую задачу можно назвать задачей информационного моделирования. ПФ интересует нас главным образом как инструмент анализа экономического развития, т.е. построение ПФ есть промежуточный этап для нахождения характеристик экономического развития. Задача информационного моделирования является задачей трудно формализуемой. Это определяет характер методов проверки выполнимости гипотез, принимаемых при использовании ПФ.

Отметим ряд проблем, возникающих при построении производственных зависимостей на основе реальной статистической информации.

В процессе экономического развития мы имеем возможность наблюдать принципиально лишь одну траекторию  $\{Y, K, L\}t$ . Это связано с уникальностью экономики (и пути ее развития) как объекта исследования. Для анализа свойств экономики мы не можем поставить ее в другие условия. Мы только наблюдаем последовательность различных состояний объекта, причем в каждом состоянии имеем лишь единственное наблюдение, а именно тройку  $\{Y, K, L\}$  (в том случае, когда мы ограничиваемся рассмотрением только этих факторов). Вообще, построение ПФ, как правило, является не самоцелью, а средством определения ряда характеристик экономического развития таких, например, как эластичностей выпуска по факторам производства  $E_K$  и  $E_L$  и вклада интенсивных факторов в темп изменения выпуска  $p$ . Эти характеристики получаются на основе использования частных производных функции. В то же время, для получения частных производных требуется знание поверхности, хотя бы в окрестности траектории (т.е. требуется информация о функционировании экономики в условиях, в которых она некогда не была), другими словами, экстраполяция кривой в поверхность, но эта задача, как известно, не имеет однозначного решения. Для однозначного решения необходимы дополнительные гипотезы (ограничения), справедливость которых математически не может быть проведена в силу единственности траектории  $\{Y, K, L\}$ . Поэтому  $E_K$ ,  $E_L$  и  $p$  не существуют сами по себе и о них можно говорить лишь в рамках какой – либо гипотезы.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения эконометрических зависимостей (на примере производственных функций) нетрадиционным путем, в рамках которого разработаны методы аппроксимации одно – и двухфакторных ПФ с помощью теории аппроксимационных сплайнов и теории линейного программирования (ЛП), основанные на определенных априорных предположениях о свойствах ПФ. Для ПФ обычными свойствами являются свойства строгой вогнутости и монотонного возрастания по факторам.

В математическом плане это приводит нас к задачам построения аппроксимирующих вогнутых и монотонно возрастающих кривых, а также аппроксимирующих вогнутых поверхностей с монотонно возрастающим по координатам сечениями.

Отметим, что подобные задачи возникают не только в эконометрии, представляющей собой область наших исследований, а и при конструировании профилей и поверхностей при проектировании в судостроении и авиационной промышленности, в машиностроении создании интерактивных графических систем и других прикладных областях.

Подробный обзор о теории сглаживающих сплайнов приведен в работе В.В. Вершинина, Ю.С. Завьялова, Н.Н. Павлова. В работе Ю.П. Иванилова, В.В. Лебедева рассматривается подход к решению задачи сглаживания экспериментальных данных, основанный на постановке и решении соответствующей задачи оптимального управления. Впервые задача построения сплайнов с заданными геометрическими характеристиками была формализована в работе А.И. Гребенникова, где она получила название задачи изогеометрической аппроксимации. Основываясь на методе локальной аппроксимации В-сплайнами, показано, что на достаточно детальной сетке узлов кубический сплайн сохраняет геометрические свойства исходных данных.

В работе F.N. Fritsch, R.E. Carlson рассматривается эффективное частичное решение задачи изогеометрической интерполяции с помощью эрмитова кубического сплайна. Разработанный ими алгоритм являлся локальным и давал монотонную кривую класса  $C[1]$ . В работе В.Т. Воронина задача изогеометрической интерполяции рассматривалась с помощью параболических сплайнов.

В дальнейшем эта задача решалась с помощью специальных рациональных сплайнов в работах В.Л. Мирошниченко. После изобретения кубических сплайнов с дополнительными узлами переменного порядка в работе S. Priess задача изогеометрической интерполяции успешно решена в работах И.И. Верлана, Б.Н. Квасова, С.А. Яценко.

В настоящей работе задачи аппроксимации вогнутых и монотонно возрастающих производственных кривых и поверхностей рассматриваются с использованием табличных, параболических и кубических сплайнов. Задачи аппроксимации с использованием сплайнов приводятся к задачам линейного программирования. Как было отмечено выше, реальные эконометрические данные в некоторых локальных участках могут указанными (геометрическими) свойствами ПФ не обладать. Поэтому постановка задачи в настоящей работе отличается от постановки задачи в упомянутых выше работах об изогеометрической интерполяции.

Итак, в первой главе рассматриваются задачи аппроксимации вогнутых и монотонно возрастающих производственных кривых и поверхностей с использованием аппроксимирующих сплайновых функций. Задачи построения аппроксимирующих сплайновых функций приводятся к задачам ЛП. Отметим, что такие задачи аппроксимации являются задачами неклассического типа, поэтому для их решения требуются специфические методы. Для формулировки указанных задач в пункте 1.1 даются некоторые необходимые сведения из теории ПФ, используемых в макроэкономике, экономическая и математическая интерпретация их свойств. Опираясь на теорию ПФ, в пункте 1.2 описываются  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ . В пункте 1.3 приводятся алгоритмы решения поставленных задач в пространстве сеточных функций  $L_h$ . Задачи  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  в пункте 1.4 решаются с помощью аппроксимирующих

параболических сплайнов в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций  $C^1[a,b]$ . В пункте 1.5 приводятся алгоритмы решения поставленных задач с помощью аппроксимирующих кубических сплайнов в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых функций  $C^2[a,b]$ . В пункте 1.6 описываются задачи  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$ . Задачи  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  в пункте 1.7 решаются в пространстве сеточных функций  $L_h, l$ . В пункте 1.8 приводятся алгоритмы решения поставленных задач с помощью двумерных параболических сплайнов в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций  $C(1,1)[\Pi]$ . Задачи  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  решаются в пункте 1.9 с помощью двумерных кубических сплайнов в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций  $C(2,2)[\Pi]$ .

В пункте 1.10 рассмотрен специальный подкласс сплайновых кривых поверхностей, представленных через базисные сплайны. Получены необходимые и достаточные условия вогнутости кривых и поверхностей из данного подкласса. Изучена также монотонность кривых и поверхностных сечений вдоль осей координат. Все условия носят конструктивный характер, что делает их пригодными для практического использования.

Во второй главе рассматриваются результаты расчетов при помощи предложенных алгоритмов статистическими данными экономического развития СССР в период с 1960 по 1985гг. и Таджикской ССР в период с 1960 по 1984гг. Строятся однофакторные и двухфакторные ПФ, вычисляются их характеристики и сравниваются с результатами работ Ю.П. Иванилова, В.А. Бессонова, А.П. Абрамова и др. В пункте 3.3 приводится описание основных тенденций экономики Таджикской ССР в период с 1960 по 1984гг. Показывается периодичность в развитии экономики СССР (показаны три периода) и Таджикской ССР (показаны два периода).

В последнее время актуальной является проблема изучения эволюции социально-экономических процессов на производственно-технологические возможности экономической системы (ЭС). В связи с этим возникает необходимость оценки этого влияния на основе макроэкономической информации. Для классических ПФ зависимость от времени обычно вводят “волевым” путем с помощью множителей как называемого технического прогресса. Затем по реальной (статистической) траектории производят идентификацию параметров ПФ. Однако динамика эндогенных факторов может оказаться не согласованной с динамикой ПФ. Актуальность такой проблемы вновь резко возросла в последние годы в России и других странах СНГ в связи с проведением экономических реформ.

Поэтому третья глава работы посвящена методам динамического описания поверхности производственных возможностей. На основе двух моделей траектории экономического роста описываются уравнения инерционной динамики границы производственных возможностей. Главная особенность предлагаемых методов динамического описания поверхности производственных возможностей заключается в том, что для описания наблюдаемой траектории и тенденций развития используется аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, локально – аппроксимационных сплайнов и статистики. Описание динамики поверхности производственных возможностей, согласованное с тенденциями развития системы, дается на основе использования дифференциальных уравнений в частных производных.

В конечном счете, с помощью этих уравнений проводится анализ потенциальных возможностей развития экономики СССР с 1960 по 1985гг. и Таджикской ССР с 1960 по 1984гг.