

Калибровка эластичностей в прикладных моделях

М.Г. Прокопьев, д.э.н., главный научный сотрудник
Института проблем рынка РАН

*Проблемы развития рыночной экономики.
Сб. научных трудов. Выпуск 2. – М.: ИПР РАН, 2007.*

Цель настоящей работы - изложить подходы и ознакомить широкий круг читателей с возможностями использования метода калибровки эластичностей и экономических исследованиях, а также с техникой калибровки экономических моделей как частичного, так и общего равновесия. В статье рассматриваются различные аспекты задач проверки, корректировки и восстановления необходимой информации исходя из теоретических предпосылок, положенных в основу экономических моделей. В работе обобщен многолетний опыт автора по разработке конкретных математических моделей частичного и общего равновесия.

Одной из основных проблем, которая возникает в ходе разработки любой экономической модели (а тем более многорегиональной многопродуктовой модели), является сбор, подготовка и анализ необходимой информации. Краеугольным камнем таких моделей являются системы функций спроса и предложения, предполагающие оценку соответствующих эластичностей. Можно выделить три основных подхода к определению уравнений спроса и эконометрическому оцениванию их параметров. Первый из них основан на непосредственной спецификации явно заданных функций безотносительно к проблеме максимизации полезности репрезентативного потребителя. Во втором, функции спроса являются производными от конкретно определенных функций предпочтения, то есть прямых или косвенных функций полезности или функции издержек. И, наконец, третий подход предполагает, что уравнения спроса задаются эластичными (гибкими) функциональными формами, которые аппроксимируют неизвестные функции предпочтений.

Примером функции спроса, которая формулируется безотносительно к функции предпочтений, может служить дважды логарифмическая ($\log - \log$) спецификация:

$$\log Q_i = \alpha_i + \eta_i \log I + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \log p_j, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (1)$$

где Q_i - объем спроса на товар i -го вида, η_i - эластичность спроса по доходу на i -ый товар, ε_{ij} - эластичность спроса на товар i относительно изменений цены товара j , p_j - цена j -го товара, I - доход (совокупные расходы), α_i - параметр уравнения. На базе данной функции построены различные модификации одной из старейших, так называемой Роттердамской системы спроса.

Второй подход к эмпирическому анализу спроса сводится к спецификации уравнений спроса на базе конкретно определенных функций предпочтения. Одной из наиболее популярных форм систем спроса, которые используются для оценки эластичностей, является Система Линейных Расходов (LES)¹. Соответствующие функции спроса LES приводятся ниже:

$$Q_i = b_i + \frac{\alpha_i}{p_i} (I - \sum_{j=1}^n b_j p_j), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (Q_i - b_i) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (2)$$

¹ В основе LES лежит функция полезности Stone-Gearly:

$$U(Q) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(Q_i - b_i), \quad \alpha_i > 0, \quad (Q_i - b_i) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (3)$$

где α_i - предельная бюджетная доля², b_i - обычно трактуют как первое приближение уровня расходов на товар i (объем потребления i -го товара, необходимый для “существования”).

Классическим примером третьего подхода является AIDS³. Данная система спроса [3], вследствие своей эластичной формы и желательных теоретических свойств, получила широкое распространение в эмпирических исследованиях. Соответствующие функции спроса AIDS в терминах бюджетных долей приводятся ниже:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln(I/P), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0, \quad (4)$$

где α_i , γ_{ij} и β_i - параметры AIDS, подлежащие эконометрической оценке, w_i - средняя бюджетная доля (доля i -го товара в совокупных расходах), P - индекс цен, который в эмпирических исследованиях, как правило, задается индексом Стоуна⁴:

Оценка эластичностей - это практически самостоятельное исследование, сравнимое по сложности с созданием конкретных прикладных моделей. Провести “прямую” оценку или актуализировать системы эластичностей спроса традиционным образом, т.е. на базе динамических рядов или данных бюджетных обследований домашних хозяйств не всегда представляется возможным. В тоже время известно множество работ, связанных с оценкой эластичностей в других странах, а также отдельные исследования отечественных специалистов. Имеющиеся “разрозненные” эластичности могут быть адаптированы для конкретных приложений. При этом выбор страны-прототипа обуславливается рядом критериев, таких, например, как уровень дохода населения, сложившаяся структура, а также традиции потребления. Настоящий метод адаптации эластичностей получил название “калибровки”.

Отметим, что использование данного метода является вынужденной мерой и не может служить альтернативой непосредственной эконометрической оценке эластичностей. Метод калибровки применим в условиях недостатка информации, если нашей целью адаптация и восстановление эластичностей спроса, исходя из данных, полученных из разных источников. Особую роль, калибровка эластичностей играет в многорегиональных многопродуктовых моделях как частичного, так и общего равновесия. Исходные наборы эластичностей по каждой стране, как правило, являются не полными и разного уровня агрегирования. Как правило, их оценка проводилась исходя из различных предпосылок на базе информации за несопоставимые годы, а также задавались экспертно. На практике данные эластичности должны быть проверены и скорректированы, а иногда и восстановлены, исходя из базовых теоретических требований, которые закладываются в модель.

В основу настоящего метода положены теоретические предпосылки (условия), которые следуют из теории спроса и рассматриваются ниже. В нашем случае, данные условия являются требованиями, которые предъявляются к функциям спроса и соответствующим эластичностям при эмпирических исследованиях.

Свойства “Полной системы спроса”. В эмпирических приложениях функции спроса оцениваются на различных уровнях агрегации как для полных, так и для частичных (неполных) бюджетов. Полная система спроса состоит из набора функций

² В LES предельные бюджетные доли являются постоянными, а именно: $\alpha_i = p_i \frac{\partial Q_i}{\partial I} = \text{const.}$ (5)

³ Наряду с AIDS следует отметить и другие системы спроса, производные от эластичных (гибких) функциональных форм, аппроксимирующих неизвестные прямые или косвенные функции полезности или функции издержек. В частности, Indirect Translog System и Direct Translog System (Christensen et al., 1975), Normalized Quadratic Demand System (NQDS; Diewert and Wales, 1988) и другие.

⁴ Применение в (4) индекса Стоуна приводит к линейной аппроксимации AIDS – LA/AIDS.

спроса для товаров или товарных групп, описывающих распределение полного бюджета в целом между ними. Полные системы спроса, согласующиеся с экономической теорией, должны удовлетворять теоретическим требованиям, включая свойства: аддитивности, гомогенности и симметрии, а также следовать закону спроса. Последние два свойства (симметрия и закон спроса) могут быть обобщены и получили название условие неотрицательности. Данные свойства являются критериями теоретической пригодности конкретной функции спроса для моделирования потребительских предпочтений. Эти системные необходимые условия непосредственно связаны с теоретическими предпосылками, положенными в основу функции полезности. Формально, они вытекают из основных свойств частных производных функций полезности по ценам и доходу.

Аддитивность (суммируемость). Аддитивность является результатом предположения, что рациональный потребитель, осуществляя свой выбор среди n товаров и максимизируя свою полезность, полностью расходует свой бюджет (или сумма расходов потребителя на все товары равняется его доходу):

$$\sum_{i=1}^n p_i h_i(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n p_i Q_i(\mathbf{p}, \mathbf{I}) = \mathbf{I}, \quad (6)$$

где $h_i(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ - функция спроса по Хиксу, $Q_i(\mathbf{p}, \mathbf{I})$ - функция спроса по Маршаллу, \mathbf{p} – вектор цен. Из данного выражения следует, что сумма объемов спроса на соответствующие товары, обусловленные уровнем их относительных цен, равняется имеющемуся в распоряжении потребителя бюджету, т.е. полным расходам. Или сумма средних бюджетных долей равна 1.

Условие аддитивности можно переписать в форме, получившей название агрегации Энгеля, дифференцируя обе части (6) относительно расходов \mathbf{I} и используя определение эластичности спроса по доходу - η_i :

$$\sum_{i=1}^n w_i \eta_i = 1. \quad (7)$$

Или словами: сумма взвешенных в соответствии со средней бюджетной долей эластичностей по доходу равняется 1.

Гомогенность (однородность). Функции спроса по Хиксу гомогенны в степени ноль относительно цен⁵. В свою очередь функции спроса по Маршаллу гомогенны в степени ноль относительно цен и дохода. Другими словами, пропорциональное изменение всех цен и дохода не приводят к изменению объемов спроса или уровня полезности. Формально, это значит, что для заданного $\lambda = \text{const}$, справедливо (8):

$$\mathbf{h}(\lambda \cdot \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}(\lambda \cdot \mathbf{p}, \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{I}). \quad (8)$$

Данное свойство часто трактуют как “отсутствие денежных иллюзий (absence of money illusion)”⁶. Формально, полученный результат является следствием линейной спецификации бюджетного ограничения. Для функций спроса по Маршаллу условие гомогенности, используя теорему Эйлера, может быть представлено в форме соответствующих эластичностей:

⁵ Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является гомогенной в степени k , если для произвольного $\lambda = \text{const}$ ($\lambda > 0$) справедливо: $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейно гомогенной, если $k=1$. Заметим, что первая производная линейно гомогенной функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является гомогенной в степени ноль, или: $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

⁶ В широком смысле: потребитель “свободен от денежной иллюзии”, если его функция избыточного спроса не меняется при равно пропорциональном изменении всех денежных цен, его реального дохода, а также и первоначального запаса денег[1]. Хорошей иллюстрацией данного свойства служит деноминация денег в 90-х годах в РФ.

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0. \quad (9)$$

Или сумма некомпенсированных эластичностей по цене и эластичности по доходу равняется нулю.

Закон спроса. Коэффициенты реакции спроса на изменение собственной цены (геометрически - тангенсы угла наклона кривых компенсированного спроса) и компенсированная эластичность по собственной цене ($\varepsilon_{ii}^{\bullet}$) – неположительны:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \Big|_{\bar{u}} \leq 0 \text{ и } \varepsilon_{ii}^{\bullet} \leq 0. \quad (10)$$

Симметрия. Компенсированные перекрестные коэффициенты влияния цен являются симметричными⁷:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \Big|_{\bar{u}} \text{ или } w_i \varepsilon_{ij}^{\bullet} = w_j \varepsilon_{ji}^{\bullet}. \quad (11)$$

Следует отметить, что условия (6) - (11) сформулированы вне зависимости от конкретного вида функции полезности. Теоретически, они должны выполняться для всех непротиворечивых полных систем спроса. В этом смысле данные свойства являются общими и часто называются условиями Слуцкого. На практике, они далеко не всегда поддерживаются реальными данными и должны тестироваться в эмпирических исследованиях.

Калибровка эластичностей исходя из условий Слуцкого. Вышеперечисленные необходимые теоретические предпосылки могут быть использованы в целях калибровки соответствующих эластичностей. Так, принимая во внимания условия Слуцкого, такие как аддитивность, гомогенность и симметрия и, используя метод наименьших квадратов, из исходной системы эластичностей, включающей имеющиеся данные и экспертные оценки специалистов – ($\varepsilon_{ij}^0, \eta_i^0$), формируется новая система – ($\varepsilon_{ij}^1, \eta_i^1$). Новая система эластичностей рассчитывается путем сведения к минимуму взвешенного квадратичного отклонения двух систем эластичностей (исходной и новой) при соблюдении ряда ограничений, в качестве которых рассматриваются условия Слуцкого⁸. Такую процедуру можно представить как процесс адаптации имеющихся предварительных (экспертных) оценок эластичностей для конкретных исследований. К указанным ограничениям, которые накладываются на эластичности, следует также добавить ряд естественных предпосылок, которые непосредственно не вытекают из самой теории потребительского спроса. Например, целесообразно предусмотреть, чтобы товары, у которых есть близкие заменители, имели бы и сравнительно высокие эластичности по ценам, тогда как другие, не имеющие близких заместителей, обладали бы более низкими эластичностями. Такого рода допущения можно учесть в рамках количественных ограничений на искомые эластичности. Формальная запись данной задачи приводится ниже:

$$\text{Min } F(\varepsilon_{ij}, \eta_i), \quad (12)$$

$$\text{где } F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2 + \sum_i \gamma_i^l (\eta_i - \eta_i^0)^2$$

⁷ Следует отметить, что сами по себе перекрестные компенсированные эластичности не являются симметричными.

⁸ Данный подход реализован в рамках системы моделей RATICM и ее последующих версий [4].

или $F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p \frac{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2}{(\varepsilon_{ij}^0)^2} + \sum_i \gamma_i^I \frac{(\eta_i - \eta_i^0)^2}{(\eta_i^0)^2}$ при следующих условиях:

(а) аддитивности (суммируемости):

$$\sum_i \eta_i \cdot \frac{p_i^0 \cdot Q_i^0}{\sum_i p_i^0 \cdot Q_i^0} = 1, \quad (13)$$

(b) гомогенности (однородности):

$$\sum_j \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0, \quad (14)$$

(c) симметрии⁹:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \cdot \frac{Q_j^0}{p_i^0} \cdot \frac{p_j^0}{Q_i^0} + (\eta_j - \eta_i) \frac{p_j^0 Q_j^0}{\sum_i p_i^0 Q_i^0}, \quad (15)$$

(d) предельных значений для ценовых эластичностей:

$$\varepsilon_{ij}^0 (1 - \beta_{ij}^p) \leq \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{ij}^0 (1 + \beta_{ij}^p), \quad (16)$$

(e) предельных значений для эластичностей по доходу:

$$\eta_i^0 (1 - \beta_i^I) \leq \eta_i \leq \eta_i^0 (1 + \beta_i^I), \quad (17)$$

где $p_i^0(p_j^0)$ - цена потребителя на $i(j)$ товар в базовом году, $Q_i^0(Q_j^0)$ - объем потребления $i(j)$ товара в базовом году, параметры $\beta_i^I, \beta_{ij}^p, \gamma_i^I, \gamma_{ij}^p$ - непосредственно не следуют из самой теории спроса, а служат целям увеличения правдоподобности калиброванной системы спроса и задаются экзогенно, ε_{ij}^0 и η_i^0 - исходные ценовые эластичности и эластичности по доходу, ε_{ij} и η_i - искомые ценовые эластичности и эластичности по доходу.

Данный подход может быть реализован, когда исходная функция полезности, остается неизвестной или функции спроса формулируется безотносительно к функциям предпочтений, а в качестве значений ряда эластичностей рассматриваются их экспертные оценки. Основная задача калибровки такого рода эклектической системы спроса сводится к приданию ей правдоподобности.

В том случае, если изначально известна конкретная система спроса, положенная в основу оценки эластичностей - основной задачей является их проверка на соответствие основным необходимым предпосылкам экономической теории спроса и, если необходимо, соответствующая корректировка. Такая проблема, как уже отмечалось выше, часто возникает при разработке многорегиональных моделей, когда информация поступает из различных источников (стран), оценки получены на основе информационных массивов за разные годы, необходима агрегация (деагрегации) исходных данных в рамках единой классификации.

Рассмотрим проблему на примере уже упомянутой LES. Ограничения, которые накладываются на параметры в (2), обеспечивают выполнение свойств, необходимых для непротиворечивой и полной системы спроса. Тогда процедуру калибровки можно сформулировать, как решение оптимизационной задачи: $\min F(\varepsilon_{ij}, \eta_i)$ ¹⁰ при следующем условии¹¹:

⁹ Настоящая формулировка условия симметрии непосредственно следует из (11) и уравнения Слуцкого (18):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\bullet} - w_j \cdot \eta_i \quad (18).$$

$$p_i Q_i^0 = p_i b_i + \alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n b_j p_j^0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (19)$$

А также ограничениях, которые в неявном виде отражают свойство аддитивности и гарантируют выполнение закона спроса, а именно:

Свойство аддитивности:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (20)$$

Закон спроса¹²:

$$0 < \alpha_i < 1. \quad (21)$$

Условие (19), в том числе, гарантирует выполнение свойства гомогенности степени ноль, так как исходная функция полезности (3) является гомогенной в степени один. Условие симметрии также следует из (19). Как и в предыдущем примере, формулировка задачи включает дополнительные ограничения (16) и (17). Переменными задачи являются искомые параметры LES: α_i - предельная бюджетная доля, b_i - "объемы потребления, необходимые "для существования". С помощью (22) и (23) приходим к искомым ценовым эластичностям и эластичностям по доходу: соответственно ϵ_{ij} и η_i .

По аналогии, если исходной системой спроса является AIDS (4), ограничения, которые накладываются на параметры данной системы, позволяют сформировать задачу калибровки эластичностей и могут служить целям их проверки, восстановления и корректировки. В частности, группа условий (25) в неявном виде отвечает требованию аддитивности:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \sum_i \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 0. \quad (25)$$

Соответственно $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ - условию симметрии.

¹⁰ где ϵ_{ii} - некомпенсированная эластичность спроса по собственной цене:

$$\epsilon_{ii} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} = - \frac{\alpha_i p_i b_i + \alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n p_j b_j \right)}{p_i x_i} \quad (22), \quad \epsilon_{ij} - \text{некомпенсированная перекрестная эластичность}$$

спроса: $\epsilon_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i} = - \frac{\alpha_i b_j p_j}{p_i x_i}, \quad i \neq j, \quad \eta_i$ - эластичность по доходу:

$$\eta_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{x_i} = \frac{\alpha_i I}{p_i b_i + \alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n p_j b_j \right)} = \frac{\alpha_i}{w_i} \quad (23).$$

¹¹ Условие (19) отражает характерную черту данной системы, давшей ей название LES (Система Линейных Расходов): расходы на потребление товара I является линейной функцией цен и дохода.

¹² Компенсированная эластичность спроса по собственной цене:

$$\epsilon_{ii}^{\bullet} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} \Big|_{u=\text{cst}} = - \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i) \left(I - \sum_{j=1}^n p_j b_j \right)}{p_i \cdot x_i} \leq 0 \quad (24).$$

Условие гомогенности выполняется, если $\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0$.

Метод калибровки может быть реализован применительно к отдельным товарным группам. В случае, если потребитель полностью расходует свой бюджет, выделенный на товары данной продуктовой группы можно ввести понятие локально полной системы спроса¹³. Фактически предположение о локально полных системах спроса лежит в основе моделей частичного равновесия применительно к рынку сельскохозяйственной продукции, где в качестве дохода (совокупных расходов) рассматриваются расходы на продовольствие, а также неявно присутствует предположение о сепарабельности предпочтений потребителя между продовольствием и другими товарными группами. В ряде известных многопродуктовых моделей, в которых функции спроса определяются на основе эконометрических методов, в отношении отдельных товарных групп допускаются теоретические предпосылки, свойственные полным системам спроса, в частности для мяса и мясопродуктов, а также молока и молокопродуктов.

Калибровка эластичностей со стороны предложения. Формально задача калибровки эластичностей со стороны предложения подобна процедуре, приведенной выше для систем спроса. Предпосылки, которые могут быть положены в основу калибровки, вытекают из теоретических свойств функции прибыли. В частности, так как в теории производителя функция прибыли принимается гомогенной в степени один, следует, что соответствующие функции предложения на продукцию и спроса на используемые ресурсы гомогенны в степени ноль. Или умножение цен на продукцию и все используемые ресурсы на постоянный фактор не меняет уровни предложения и спроса на ресурсы до тех пор, пока их относительные цены остаются неизменными. В терминах эластичностей это значит, что сумма эластичностей предложения по цене на продукцию и спроса на ресурсы по цене на сырье равна нулю.

Второй предпосылкой, которая ниже используется в процедуре калибровки, является условие симметрии. Свойство симметрии следует из симметричности матрицы производных второго порядка функции прибыли. Следовательно, производная функции предложения товара i относительно цены на товар j равняется производной функции предложения товара j относительно цены на товар i . Условие симметрии может быть переписано в терминах эластичностей.

Рассмотрим применение метода калибровки на примере моделирования молочного сектора экономики. В нашем случае переработка молока включает только производство масла, сыра, обезжиренного молока, а также цельномолочной, включая прочие виды продукции. Предполагается, что молоко является единственным ресурсом, который полностью потребляется при производстве приведенных выше видов конечной продукции. Производство масла и обезжиренного молока технологически тесно связаны между собой в процессе переработки сырья. Ни один из этих видов продукции не может быть получен без производства второго.

Предложение конечной продукции и спрос на ресурсы (молоко) моделируется на основе системы функций, которые являются результатом решения задачи максимизации агрегированной функции прибыли (из всех множеств допустимых решений выбирается такая комбинация предложения товаров и спроса на факторы производства, которая максимизирует прибыль при заданных ценах на конечную продукцию и сырье (в нашем случае молоко))[5,8].

¹³ Практически, это значит, что совокупность товаров данной группы должна в том числе включать "прочие" товары.

**Агрегированная схема использования молока
на производство молочных продуктов**

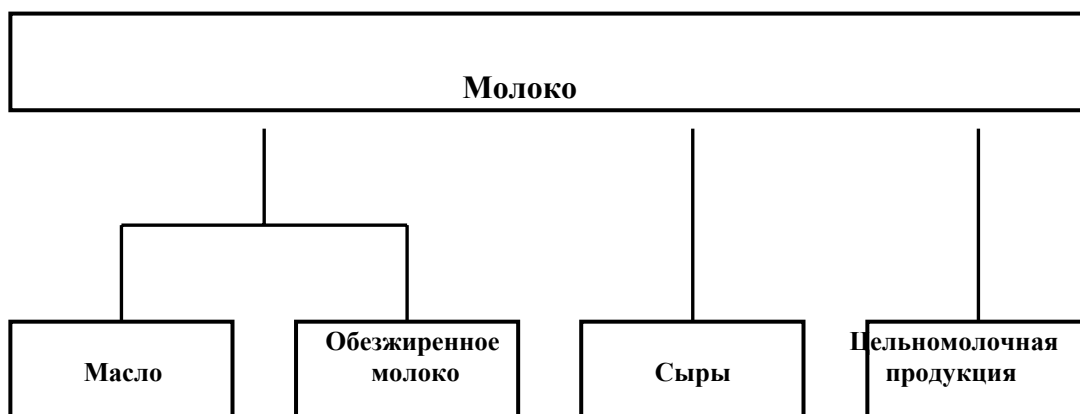


Схема 1

В общем виде агрегированная функция прибыли (π) приводится ниже:

$$\pi = \pi(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (26)$$

где p_{bt}, p_{sm}, p_{ch} и p_{wh} - соответственно цены производителя на масло, сыр, обезжиренное молоко, а также цельномолочную и прочую продукцию, p_m - цена на сырье (молоко).

Соответствующие функции спроса на сырье (27), а также предложения конечной продукции (28), (29), (30), (31) определяются из леммы Хотеллинга [6]:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_m} = -Q_m^d(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (27)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_{bt}} = Q_{bt}^s(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_{sm}} = Q_{sm}^s(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_{ch}} = Q_{ch}^s(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_{wh}} = Q_{wh}^s(p_{bt}, p_{sm}, p_{ch}, p_{wh}, p_m), \quad (31)$$

где $Q_{bt}^s, Q_{sm}^s, Q_{ch}^s$ и Q_{wh}^s - представляют собой объемы предложения соответствующих конечных видов продукции, а Q_m^d - объем спроса на сырье. Или коэффициент реакции прибыли на изменение цены на сырье равен со знаком минус объему спроса на сырье, а коэффициент реакции прибыли на изменение цен на определенный вид конечной продукции равен объему предложения данной продукции. Данные функции спроса и предложения отвечают теоретическим предпосылкам, в том числе гомогенности и симметрии. Кроме того, должны удовлетворяться ряд технических условий, связанных с технологией производства конечной продукции.

Приведенная система функций (27 - 31) предполагает количественную оценку 25 показателей эластичности (см. табл. 1, обозначения приводятся по тексту). Пять условий гомогенности, восемь условий симметрии и, в силу специфики сектора четыре технологических условия, после соответствующих преобразований (см. ниже), позволяют эндогенно определить 17 соответствующих показателей. Таким образом, для полной определенности системы эластичностей экзогенно необходимо задать только 8 показателей.

Таблица 1

**Система эластичностей предложения продукции и спроса
на сырье молочного сектора***

	Молоко	Масло	Обезжиренное Молоко	Сыр	Цельномолочная прочая продукция	Сумма
Спрос на молоко	$\epsilon_m^d (<0)$	$\epsilon_{m,bt}^d (>0)$	$\epsilon_{m,sm}^d (>0)$	$\epsilon_{m,ch}^d (>0)$	$\epsilon_{m,wh}^d (>0)$	= 0
Предложение масла	$\epsilon_{bt,m}^s (<0)$	$\epsilon_{bt}^s (>0)$	$\epsilon_{bt,sm}^s (>0)$	$\epsilon_{bt,ch}^s (<0)$	$\epsilon_{bt,wh}^s (<0)$	= 0
Предложение обезжиренного молока	$\epsilon_{sm,m}^s (<0)$	$\epsilon_{sm,bt}^s (>0)$	$\epsilon_{sm}^s (>0)$	$\epsilon_{sm,ch}^s (<0)$	$\epsilon_{sm,wh}^s (<0)$	= 0
Предложение сыра	$\epsilon_{ch,m}^s (<0)$	$\epsilon_{ch,bt}^s (<0)$	$\epsilon_{ch,sm}^s (<0)$	$\epsilon_{ch}^s (>0)$	$\epsilon_{ch,wh}^s (<0)$	= 0
Предложение цельномолочной и прочей продукции	$\epsilon_{wh,m}^s (<0)$	$\epsilon_{wh,bt}^s (<0)$	$\epsilon_{wh,sm}^s (<0)$	$\epsilon_{wh,ch}^s (<0)$	$\epsilon_{wh}^s (>0)$	= 0

* Знаки (+) и (-) означают, что соответствующие показатели эластичности принимают положительные или отрицательные значения. Сумма эластичностей по строкам равная нулю следует из условия гомогенности.

Технические (технологические) условия. Настоящие условия, как уже отмечалось выше, связаны с конкретной технологией производства. Так, предложение масла и предложение обезжиренного молока тесно взаимосвязаны: они могут производиться только в определенной пропорции между собой. Техническое условие между предложением масла и обезжиренного молока можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{bt}} = \frac{Q_{bt}^s}{Q_{sm}^s} \cdot \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{bt}}, \quad (32)$$

где $\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{bt}}$ - эффект влияния изменения цены масла на его предложение,

$\frac{Q_{bt}^s}{Q_{sm}^s}$ - фиксированная доля объема предложения масла к объему предложения

обезжиренного молока, $\frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{bt}}$ - эффект влияния изменения цены масла на предложение

обезжиренного молока.

После несложных преобразований (32), используя определение собственной и перекрестной ценовой эластичности, получим следующее соотношение:

$$\epsilon_{bt}^s = \epsilon_{sm,bt}^s, \quad (33)$$

где ϵ_{bt}^s - собственная ценовая эластичность предложения масла, $\epsilon_{sm, bt}^s$ - эластичность предложения обезжиренного молока в зависимости от цены масла. Аналогично формулируется техническое условие между объемами предложения обезжиренного молока и масла:

$$\frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{sm}} = \frac{Q_{sm}^s}{Q_{bt}^s} \cdot \frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{sm}} \quad \text{или} \quad \epsilon_{sm}^s = \epsilon_{bt, sm}^s, \quad (34)$$

где $\frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{sm}}$ - эффект влияния изменения цены обезжиренного молока на его предложение,

$\frac{Q_{sm}^s}{Q_{bt}^s}$ - фиксированная доля объема предложения обезжиренного молока к

объему предложения масла,

$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{sm}}$ - эффект влияния влияния изменения цены обезжиренного молока на предложение масла,

ϵ_{sm}^s - собственная ценовая эластичность предложения обезжиренного молока,

$\epsilon_{bt, sm}^s$ - эластичность предложения масла в зависимости от цены обезжиренного молока.

Следующие два технических условия, которое также определяются технологией производства, запишем как:

$$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{ch}} = \frac{Q_{bt}^s}{Q_{sm}^s} \cdot \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{ch}} \quad \text{или} \quad \epsilon_{bt, ch}^s = \epsilon_{sm, ch}^s, \quad (35)$$

$$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{wh}} = \frac{Q_{bt}^s}{Q_{sm}^s} \cdot \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{wh}} \quad \text{или} \quad \epsilon_{bt, wh}^s = \epsilon_{sm, wh}^s, \quad (36)$$

где $\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{ch}}$ - эффект влияния изменения цен на сыры на предложение масла,

$\frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{ch}}$ - эффект влияния изменения цен на сыры на предложение обезжиренного

молока,

$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{wh}}$ - эффект влияния изменения цен на цельномолочную и прочую

продукцию на предложение масла,

$\frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{wh}}$ - эффект влияния изменения цен на цельномолочную и прочую

продукцию на предложение обезжиренного молока,

$\epsilon_{bt, ch}^s$ - эластичность предложения масла в зависимости от цен на сыры,

$\epsilon_{sm, ch}^s$ - эластичность предложения обезжиренного молока в зависимости от цен на сыры,

$\epsilon_{bt,wh}^s$ - эластичность предложения масла в зависимости от цен и на цельномолочную прочую продукцию,

$\epsilon_{sm,wh}^s$ - эластичность предложения обезжиренного молока в зависимости от цен на цельномолочную и прочую продукцию.

Условия симметрии. Предполагается, что функции предложения и спроса (27-31), удовлетворяют шести условиям симметрии, соответственно отражающих:

Эффект влияния цены конечной продукции на объемы предложения:

$$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{ch}} = \frac{\partial Q_{ch}^s}{\partial p_{bt}}, \quad \frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_{sm}} = \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{bt}}, \quad \frac{\partial Q_{ch}^s}{\partial p_{sm}} = \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_{ch}}, \quad \frac{\partial Q_{wh}^s}{\partial p_{ch}} = \frac{\partial Q_{ch}^s}{\partial p_{wh}}. \quad (37)$$

Эффект влияния цены на сырье (в нашем случае молоко) на объемы предложения конечной продукции или влияния изменений в ценах на конечную продукцию на объемы спроса на сырье:

$$\frac{\partial Q_{bt}^s}{\partial p_m} = -\frac{\partial Q_m^d}{\partial p_{bt}}, \quad \frac{\partial Q_{sm}^s}{\partial p_m} = -\frac{\partial Q_m^d}{\partial p_{sm}}, \quad \frac{\partial Q_{ch}^s}{\partial p_m} = -\frac{\partial Q_m^d}{\partial p_{ch}}, \quad \frac{\partial Q_{wh}^s}{\partial p_m} = -\frac{\partial Q_m^d}{\partial p_{wh}}, \quad (38)$$

Условия (37) и (38) после некоторых преобразований можно переписать в терминах перекрестных эластичностей, а именно:

$$\epsilon_{bt,ch}^s = \epsilon_{ch,bt}^s \cdot \left(\frac{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}}{Q_{bt}^s \cdot p_{bt}} \right), \quad (39)$$

$$\epsilon_{bt,sm}^s = \epsilon_{sm,bt}^s \cdot \left(\frac{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}}{Q_{bt}^s \cdot p_{bt}} \right), \quad (40)$$

$$\epsilon_{ch,sm}^s = \epsilon_{sm,ch}^s \cdot \left(\frac{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}}{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}} \right), \quad (41)$$

$$\epsilon_{wh,ch}^s = \epsilon_{ch,wh}^s \cdot \left(\frac{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}}{Q_{wh}^s \cdot p_{wh}} \right), \quad (42)$$

$$\epsilon_{bt,m}^s = -\epsilon_{m,bt}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{bt}^s \cdot p_{bt}} \right), \quad (43)$$

$$\epsilon_{sm,m}^s = -\epsilon_{m,sm}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}} \right), \quad (44)$$

$$\epsilon_{ch,m}^s = -\epsilon_{m,ch}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}} \right), \quad (45)$$

$$\epsilon_{wh,m}^s = -\epsilon_{m,wh}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{wh}^s \cdot p_{wh}} \right), \quad (46)$$

где $\epsilon_{ch,sm}^s$ - эластичность предложения сыров в зависимости от цены на обезжиренное молоко, $\epsilon_{ch,bt}^s$ - эластичность предложения сыров в зависимости от цены на масло, $\epsilon_{ch,wh}^s$ $\epsilon_{bt,m}^s$ - эластичность предложения масла в зависимости от цены на молоко, $\epsilon_{sm,m}^s$ - эластичность предложения обезжиренного молока в зависимости от цены на молоко, $\epsilon_{ch,m}^s$ - эластичность предложения сыров в зависимости от цены на молоко, $\epsilon_{m,bt}^d$ - эластичность спроса на молоко в зависимости от цены на масло, $\epsilon_{m,sm}^d$ - эластичность

спроса на молоко в зависимости от цены на обезжиренное молоко, $\varepsilon_{m,ch}^d$ - эластичность спроса на молоко в зависимости от цен на сыры, $\varepsilon_{m,wh}^d$ - эластичность спроса на молоко в зависимости от цены на цельномолочную и прочую продукцию, $\varepsilon_{wh,m}^s$ - эластичность предложения цельномолочной и прочей продукции в зависимости от цены на молоко, $\varepsilon_{wh,ch}^s$ - эластичность предложения цельномолочной и прочей продукции в зависимости от цены на сыры, $\varepsilon_{ch,wh}^s$ - эластичность предложения сыров в зависимости от цены на цельномолочную и прочую продукцию.

Условия гомогенности. Условие гомогенности функции спроса на сырье означает, что для эластичностей спроса на молоко справедливо выражение:

$$\varepsilon_m^d + \varepsilon_{m,bt}^d + \varepsilon_{m,sm}^d + \varepsilon_{m,ch}^d + \varepsilon_{m,wh}^d = 0, \quad (47)$$

где ε_m^d - собственная ценовая эластичность спроса на молоко.

Соответственно, со стороны предложения масла, обезжиренного молока, сыров, а также цельномолочной и прочей продукции выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_{bt,m}^d + \varepsilon_{bt}^s + \varepsilon_{bt,sm}^s + \varepsilon_{bt,ch}^s + \varepsilon_{bt,wh}^s = 0, \quad (48)$$

$$\varepsilon_{sm,m}^d + \varepsilon_{sm,bt}^s + \varepsilon_{sm}^s + \varepsilon_{sm,ch}^s + \varepsilon_{sm,wh}^s = 0, \quad (49)$$

$$\varepsilon_{ch,m}^d + \varepsilon_{ch,bt}^s + \varepsilon_{ch,sm}^s + \varepsilon_{ch}^s + \varepsilon_{ch,wh}^s = 0, \quad (50)$$

$$\varepsilon_{wh,m}^d + \varepsilon_{wh,bt}^s + \varepsilon_{wh,sm}^s + \varepsilon_{wh,ch}^s + \varepsilon_{wh}^s = 0. \quad (51)$$

Экономическая интерпретация данного условия достаточно прозрачна: конечные результаты определяются влиянием только относительных цен, при одновременном изменении всех цен на один и тот же процент, объемы спроса на сырье и предложение конечной продукции остаются без изменений.

Суммируя сказанное, можно сформулировать систему (52 – 68) из 17 линейных независимых уравнений, а именно:

$$\varepsilon_{bt,ch}^s = \varepsilon_{ch,bt}^s \cdot \left(\frac{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}}{Q_{bt}^s \cdot p_{bt}} \right), \quad (52)$$

$$\varepsilon_{bt,sm}^s = \varepsilon_{sm,bt}^s \cdot \left(\frac{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}}{Q_{bt}^s \cdot p_{bt}} \right), \quad (53)$$

$$\varepsilon_{ch,sm}^s = \varepsilon_{sm,ch}^s \cdot \left(\frac{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}}{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}} \right), \quad (54)$$

$$\varepsilon_{wh,ch}^s = \varepsilon_{ch,wh}^s \cdot \left(\frac{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}}{Q_{wh}^s \cdot p_{wh}} \right), \quad (55)$$

$$\varepsilon_{sm,m}^s = -\varepsilon_{m,sm}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}} \right), \quad (56)$$

$$\varepsilon_{sm,m}^s = -\varepsilon_{m,sm}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{sm}^s \cdot p_{sm}} \right), \quad (57)$$

$$\varepsilon_{ch,m}^s = -\varepsilon_{m,ch}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d \cdot p_m}{Q_{ch}^s \cdot p_{ch}} \right), \quad (58)$$

$$\varepsilon_{wh,m}^s = -\varepsilon_{m,wh}^d \cdot \left(\frac{Q_m^d}{Q_{wh}^s} \cdot \frac{P_m}{P_{wh}} \right), \quad (59)$$

$$\varepsilon_m^d + \varepsilon_{m,bt}^d + \varepsilon_{m,sm}^d + \varepsilon_{m,ch}^d + \varepsilon_{m,wh}^d = 0, \\ \varepsilon_{bt,m}^d + \varepsilon_{bt}^s + \varepsilon_{bt,sm}^s + \varepsilon_{bt,ch}^s + \varepsilon_{bt,wh}^s = 0, \quad (61)$$

$$\varepsilon_{sm,m}^d + \varepsilon_{sm,bt}^s + \varepsilon_{sm}^s + \varepsilon_{sm,ch}^s + \varepsilon_{sm,wh}^s = 0, \quad (62)$$

$$\varepsilon_{ch,m}^d + \varepsilon_{ch,bt}^s + \varepsilon_{ch,sm}^s + \varepsilon_{ch}^s + \varepsilon_{ch,wh}^s = 0, \quad (63)$$

$$\varepsilon_{wh,m}^d + \varepsilon_{wh,bt}^s + \varepsilon_{wh,sm}^s + \varepsilon_{wh,ch}^s + \varepsilon_{wh}^s = 0, \quad (64)$$

$$\varepsilon_{bt,ch}^s = \varepsilon_{sm,ch}^s, \quad (65) \quad \varepsilon_{sm}^s = \varepsilon_{bt,sm}^s, \quad (66) \quad \varepsilon_{bt,ch}^s = \varepsilon_{sm,ch}^s, \quad (67)$$

$$\varepsilon_{bt,wh}^s = \varepsilon_{sm,wh}^s. \quad (68)$$

Переменными данной системы уравнений являются соответствующие эластичности. Общее число переменных равно 25. Соответствующие цены и объемы спроса и предложения являются параметрами и задаются по отчетным данным базового года. Таким образом, для решения задачи необходимо экзогенно задать 8 коэффициентов эластичности, которые могут быть получены из соответствующей литературы либо экспертным путем. В результате система ценовых эластичностей спроса на молоко, предложения сыра, масла и обезжиренного молока будет полностью определена (восстановлена). Тот же метод можно использовать и для других сложных продуктов и товарных групп.

Сама по себе “калибровка”, конечно, не может заменить необходимость эконометрической оценки эластичностей. Тем не менее, во многих приложениях, является необходимым, а иногда и единственно возможным инструментом исследования. Особенно если речь о моделях внешней торговли, которые включают модули по отдельным странам. Очевидно, что информация, которая поступает из разных источников (стран) должна проверяться на соответствие единым теоретическим предпосылкам и, затем, соответствующим образом корректироваться. При этом нередко существует необходимость восстановления недостающих данных. Проблема калибровки эластичностей возникает при необходимости агрегирования (деагрегирования) номенклатуры товарных групп, принятой в модели. Несколько в стороне стоит задача калибровки параметров уравнений в моделях общего и частичного равновесия. Данный вопрос требует самостоятельного рассмотрения.

Литература

1. Патинкин Д. Деньги, проценты и кредит: соединение теории денег и теории стоимости. Перевод с английского по редакцией Н.Я. Петракова. - М.: “Экономика”, 2004.
2. Applied Methods For Trade Policy analysis. A Handbook. Edited by J.Francois and K. Reinert, Cambridge University Press, 1997.
3. Deaton A., Muelibauer J., “An Almost Ideal Demand System.” The American Economic Review, Vol. 70, 1980, No. 3, pp.312-326.
4. Fock A., Weingarten P., Wahl O., and Prokopiev M. Russia’s Bilateral Agricultural Trade: First Results of Partial Equilibrium Analysis In Russian’s Agro-food Sector. Towards Truly Functioning Markets. Kluwer Academic Publishers, Boston (2000).
5. Haley S., (1988). Joint Products in the SWOPSIM Modeling Framework. Staff Report No. AGES881024. Washington, DC. ERS USDA.
6. Handbook of mathematical economics. Volume II. Ed. by Arrow and Intriligator. North-Holland Publishing Company. Amsterdam-New York-Oxford. p. 452.

7. Pogany P., (1996). The Almost Ideal Demand System and its application in general equilibrium calculations. Working paper No. 96-05-A. Office of Economics U.S. International Trade Commission. Washington, DC.
8. Roningen V.,(1986). A Static World Policy Simulation (SWOPSIM) Modeling Framework. Staff Report No.AGES860625. Washington, DC. ERS USDA.